Curso de Termodinâmica-GFI 04116

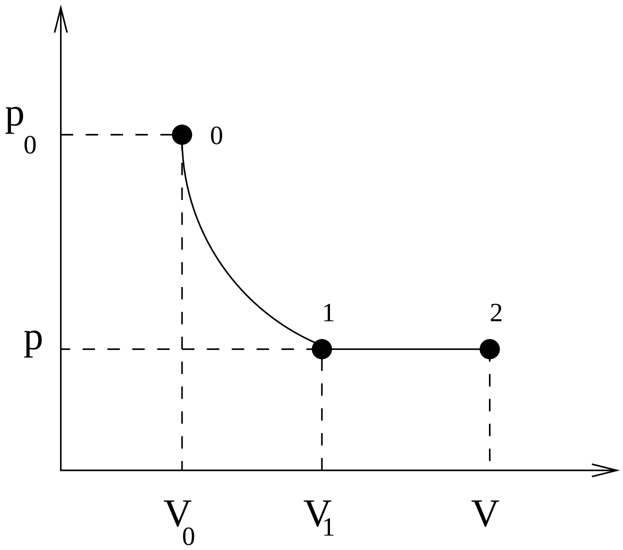
2º semestre de 2010

Prof. Jürgen Stilck

Solução da 1ª Prova

Questão 1

Podemos unir qualquer outro ponto do plano (V, p) ao ponto fiducial (V_0, p_0) por uma sequência de um processo adiabático e outro isobárico, como ilustrado abaixo:



No processo adiabático $0 \to 1$, temos $Q = 0$ e, portanto,

$$U_1 - U_0 = -W = -\int_{V_0}^{V_1} p\, dV = -p_0 V_0^{7/5} \int_{V_0}^{V_1} V^{-7/5}\, dV =$$

$$\frac{5}{2} p_0 V_0^{7/5} (V_1^{-2/5} - V_0^{-2/5}).$$

Considerando, agora, o processo isobárico $1 \to 2$, temos:

$$U_2 - U_1 = Q - W = \frac{7}{2} p(V - V_1) - p(V - V_1) = \frac{5}{2} p(V - V_1).$$

Somando os dois termos, temos a variação total da energia interna do sistema no processo $0 \to 1 \to 2$:

$$U_2 - U_0 = \frac{5}{2}(pV - pV_1 + p_0 V_0^{7/5} V_1^{-2/5} - p_0 V_0).$$

Lembrando que os dois primeiros pontos estão sobre uma curva adiabática, teremos que $pV_1^{7/5} = p_0 V_0^{7/5}$, o que implica no cancelamento dos dois temos intermediários da expressão acima, logo:

$$U_2 - U_0 = \frac{5}{2}(pV - pV_1 - p_0 V_0),$$

escolhendo $U_0 = 0$, concluimos que:

$$U = \frac{5}{2} pV.$$

Questão 2

a) Para um mol de gás ideal, $p_0 V_0 = RT_0$, logo:

$$T_0 = \frac{p_0 V_0}{R}.$$

b) Na expansão livre $(V_0, p_0) \to (2V_0, p_1)$ a energia interna $U = cT$ é constante, logo a temperatura não varia e $p_0 V_0 = 2V_0 p_1$. A pressão depois do processo será, portanto:

$$p_1 = \frac{p_0}{2}.$$

c) O segundo processo $(2V_0, p_1) \to (V_0, p_2)$ é adiabático, logo $p_2 V_0^\gamma = p_1 V_0^\gamma$, e substituindo o valor de p_1 determinado acima, concluimos que:

$$p_2 = 2^{\gamma - 1} p_0.$$

A temperatura nesse estado será dada por:

$$T_2 = \frac{p_2 V_0}{R} = \frac{2^{\gamma-1} p_0 V_0}{R} = 2^{\gamma-1} T_0.$$

Portanto, vemos que $\gamma - 1 = 2/3$, o que leva a $\gamma = 5/3$.

d) O processo é adiabático, logo $U_f - U_i = -W$, logo:

$$W = U_i - U_f = c(T_i - T_f) = cT_0(1 - 2^{\gamma-1}) = c\frac{p_0 V_0}{R}(1 - 2^{2/3}).$$

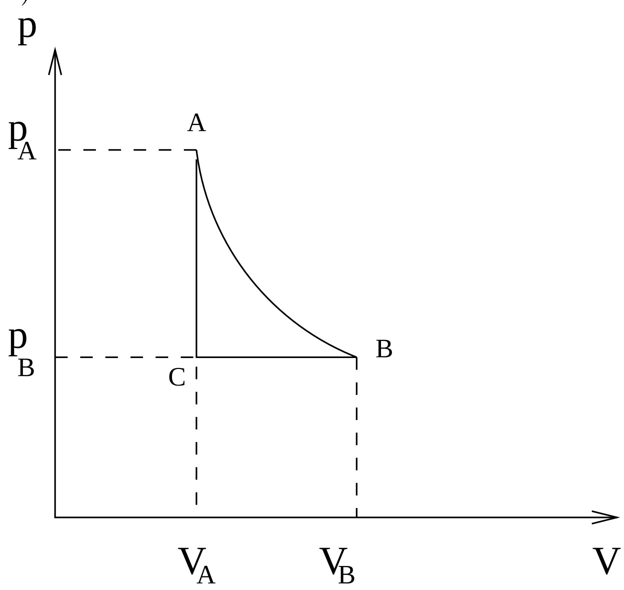
Como $\gamma = (c+R)/c = 5/3$, $c/R = 3/2$, logo:

$$W = \frac{3}{2} p_0 V_0 (1 - 2^{2/3}) \approx -0,8811\, p_0 V_0.$$

Note que este é o trabalho realizado *pelo* sistema. O trabalho realizado sobre o sistema é o mesmo com o sinal trocado.

Questão 3

a)



Como, para um gás ideal, $pV = NRT$, temos:

$$T_A = T_B = \frac{p_A V_A}{2R},$$

e

$$p_B = p_C = \frac{V_A}{V_B} p_A.$$

A temperatura em C será:

$$T_C = \frac{p_C V_A}{2R} = \frac{V_A}{V_B}\frac{p_A V_A}{2R}.$$

b) No processo isobárico $B \to C$ a entropia como função da pressão será:

$$S = S_B + 3R\left[\frac{5}{3}\ln\frac{V}{V_B}\right] = S_B + 3R\left[\frac{5}{3}\ln\frac{T}{T_B}\right],$$

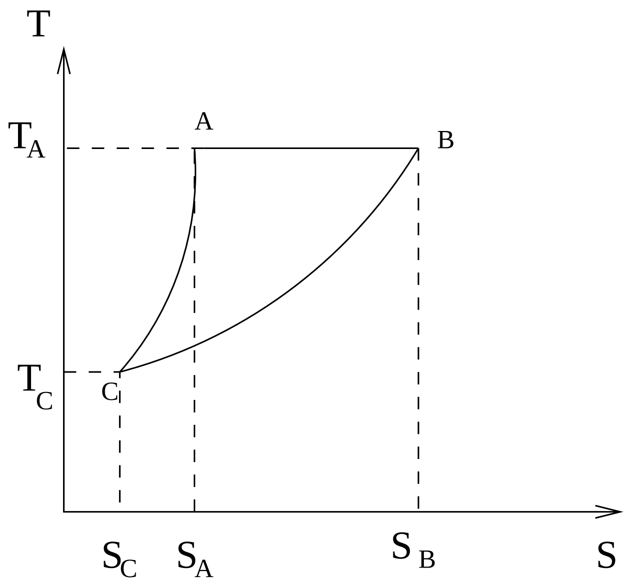
pois V é proporcional a T. Invertendo essa expressão, temos:

$$T = T_B \exp\left(\frac{S - S_B}{5R}\right).$$

De maneira análoga, concluimos que no processo isocórico $C \to A$ teremos:

$$T = T_C \exp\left(\frac{S - S_C}{3R}\right).$$

Com esses resultados, podemos esboçar o diagrama (S, T) do ciclo:



c) Vamos considerar cada trecho do ciclo:
$A \to B$:

$$W = \int_{V_A}^{V_B} p\,dV = p_A V_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = p_A V_A \ln\frac{V_B}{V_A},$$

$$U_B - U_A = 3R(T_B - T_A) = 0,$$

$$Q = W = p_A V_A \ln\frac{V_B}{V_A}.$$

$B \to C$:

$$W = \int_{V_B}^{V_A} p\, dV = \frac{V_A}{V_B} p_A (V_A - V_B),$$

$$U_C - U_B = 3R(T_C - T_B) = \frac{3}{2} p_A V_A \left(\frac{V_A}{V_B} - 1 \right),$$

$$Q = \Delta U + W = \frac{5}{2} p_A V_A \left(\frac{V_A}{V_B} - 1 \right).$$

$C \to A$:

$$W = 0,$$

$$U_A - U_C = 3R(T_A - T_C) = \frac{3}{2} p_A V_A \left(1 - \frac{V_A}{V_B} \right),$$

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2} p_A V_A \left(1 - \frac{V_A}{V_B} \right).$$

d) O sistema recebe calor nos trechos $A \to B$ e $C \to A$, de maneira que o calor total recebido será:

$$Q_1 = p_A V_A \left[\ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{V_A}{V_B} \right) \right].$$

Já no trecho $B \to C$, o sistema perde calor:

$$|Q_2| = \frac{5}{2} p_A V_A \left(1 - \frac{V_A}{V_B} \right).$$

Podemos, então, determinar o rendimento do ciclo:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{\frac{5}{2}\left(1 - \frac{V_A}{V_B}\right)}{\ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{V_A}{V_B}\right)} = 1 - \frac{5(1-x)}{3(1-x) - 2\ln x},$$

onde $x = V_A/V_B$. O rendimento do ciclo de Carnot operando entre as temperaturas T_A e T_C é $\eta_C = 1 - T_C/T_A = 1 - x$. Resta mostrar que x é menor que o segundo termo do rendimento do ciclo calculado acima, no intervalo $]0,1[$, pois ambos são iguais para $x = 0$ (ambas são iguais a 1) e $x = 1$ (ambas se anulam), que correspondem a limites não físicos. Para isso, vamos estudar o sinal da função

$$f(x) = \frac{5(1-x)}{3(1-x) - 2\ln x} - x = \frac{5(1-x) - x[3(1-x) - 2\ln x]}{3(1-x) - 2\ln x}.$$

No intervalo $0 < x < 1$, o denominador é positivo, portanto o sinal da função é determinado pelo numerador $5 - 8x + 3x^2 + 2x \ln x$. Estudando essa função, vemos que ela se anula para $x = 1$, assume o valor 5 em $x = 0$, sua derivada é negativa no intervalo, se anulando em $x = 1$, sua derivada segunda é positiva em todo o intervalo. É, portanto positiva e convexa em todo o intervalo, se anulando em $x = 1$, que é também um mínimo.